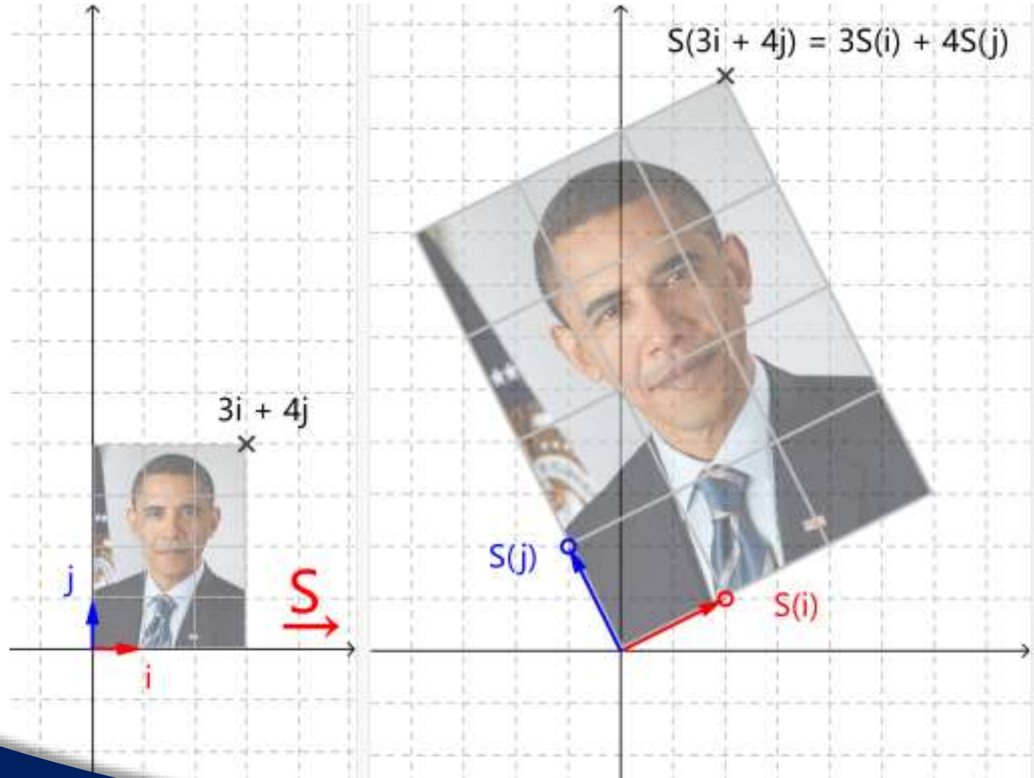


特征值与特征向量

城市分析方法系列课程

苏州大学 王灿

矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = ?$$

2行，2列　　2行，1列

左矩阵列数=右矩阵行数，才能相乘

- 一个$m \times p$的矩阵A，和一个$p \times n$的矩阵B，可以相乘得到一个$m \times n$的矩阵C
- 矩阵C中的元素C_{ij}（第i行、第j列）是通过取矩阵A的第i行与矩阵B的第j列对应元素的乘积，然后将这些乘积求和得到的。

矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 0 \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ \end{bmatrix}$$

2行，2列　　2行，1列　　2行，1列

左矩阵列数=右矩阵行数，才能相乘

- 一个$m \times p$的矩阵A，和一个$p \times n$的矩阵B，可以相乘得到一个$m \times n$的矩阵C
- 矩阵C中的元素C_{ij}（第i行、第j列）是通过取矩阵A的第i行与矩阵B的第j列对应元素的乘积，然后将这些乘积求和得到的。

矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 + 0 \times 0 \\ 0 \times 1 + 3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2行，2列　　2行，1列　　2行，1列

左矩阵列数=右矩阵行数，才能相乘

- 一个$m \times p$的矩阵A，和一个$p \times n$的矩阵B，可以相乘得到一个$m \times n$的矩阵C
- 矩阵C中的元素C_{ij}（第i行、第j列）是通过取矩阵A的第i行与矩阵B的第j列对应元素的乘积，然后将这些乘积求和得到的。

矩阵与标量的乘法

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 1 \times 2 \\ \\ 0 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 矩阵（向量）与标量的积，就等于矩阵（向量）中的每个元素与标量的积

特征值和特征向量

$$Av = \lambda v$$

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以一个非零向量 $\boldsymbol{v}$，等于该向量 $\boldsymbol{v}$ 乘以一个常数 $\boldsymbol{\lambda}$，则常数 $\boldsymbol{\lambda}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**（eigenvalue），向量 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的**特征向量**（eigenvector）。

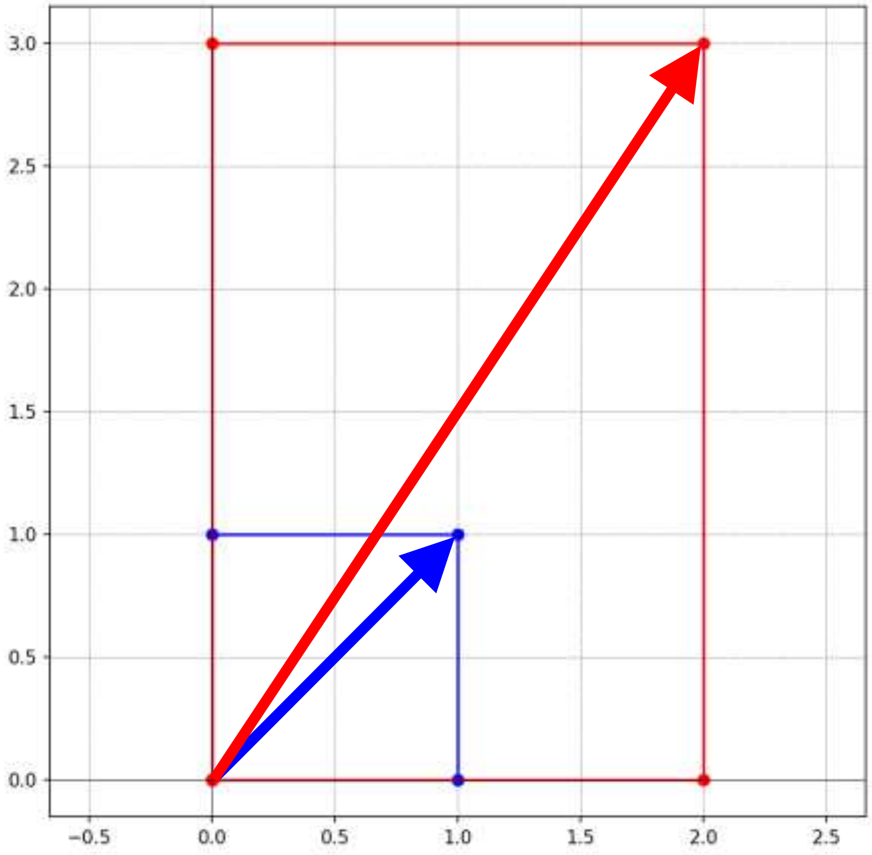
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{特征向量}} \times \underbrace{2}_{\text{特征值}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

特征值和特征向量

But Why?

数学家、物理学家们发现，许多现象中都有
$Av=\lambda v$的关系，于是就形成了特征分解理论……

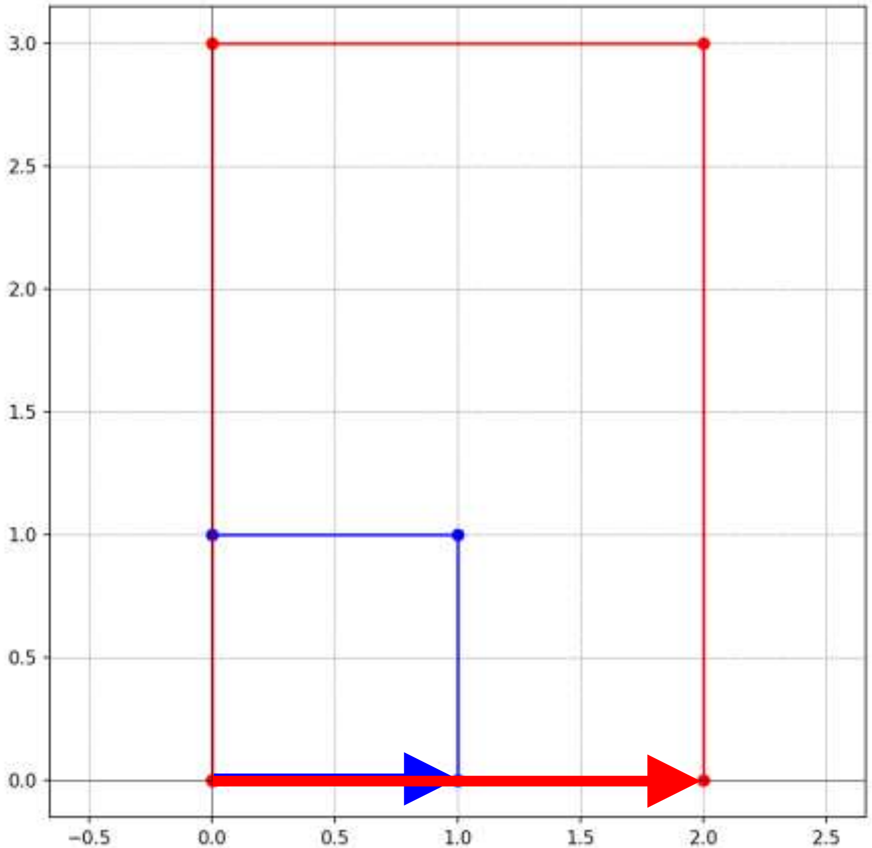
几何意义



- n维矩阵乘法，就是n维空间的线性变换，比如，把蓝色正方形拉伸成红色矩形

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 1 \\ 0 \times 1 + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

几何意义



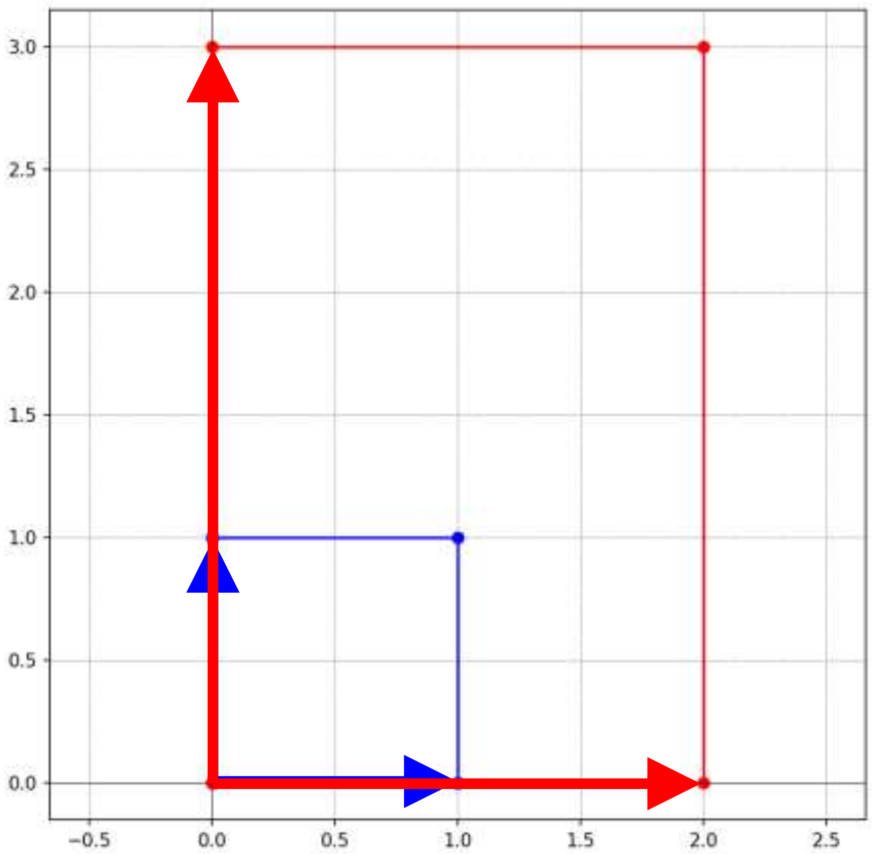
- n维矩阵乘法，就是n维空间的线性变换，比如，把蓝色正方形拉伸成红色矩形

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times1+0\times1\\0\times1+3\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

- 但是，有些向量却可以在线性变换中保持方向不变，仅仅沿原方向进行放缩。

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times1+0\times0\\0\times1+3\times0\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

几何意义



- n维矩阵乘法，就是n维空间的线性变换，比如，把蓝色正方形拉伸成红色矩形

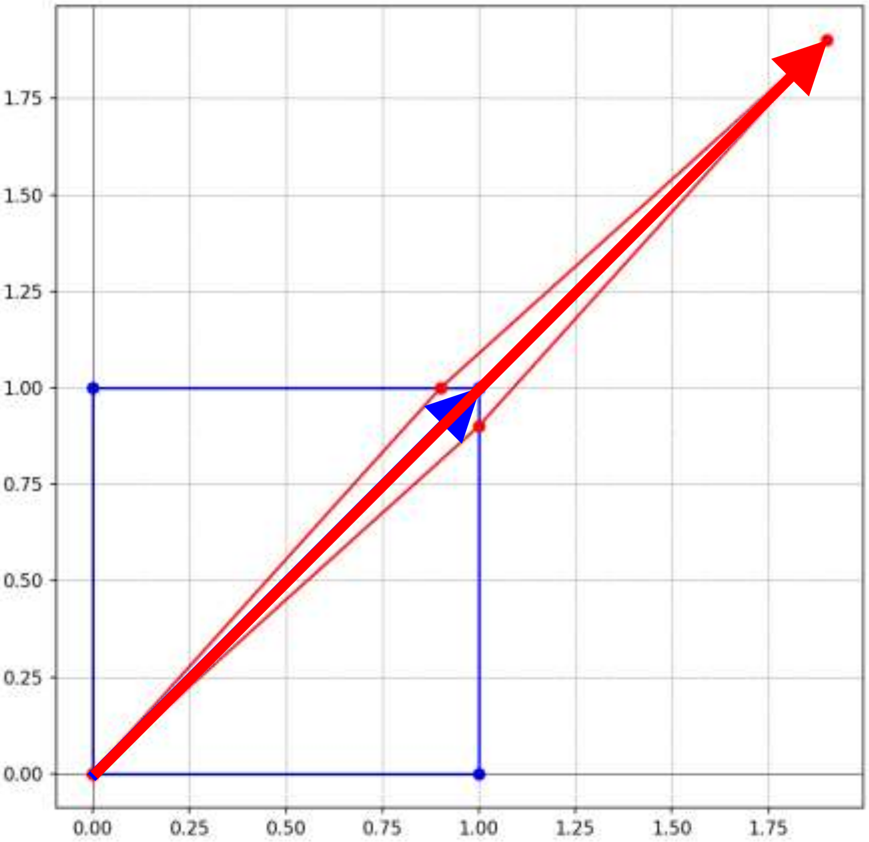
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 1 \\ 0 \times 1 + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- 但是，有些向量却可以在线性变换中保持方向不变，仅仅沿原方向进行放缩。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 0 \\ 0 \times 1 + 3 \times 0 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \underbrace{3}_{\text{特征值}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{特征向量}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

几何意义



- n维矩阵乘法，就是n维空间的线性变换：拉伸、旋转、剪切、投影……
- 有些向量可以在线性变换中保持方向不变，仅仅沿原方向进行放缩。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.901 \\ 0.901 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{1.901}_{\text{特征值}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{特征向量}} = \begin{bmatrix} 1.901 \\ 1.901 \end{bmatrix}$$

- 特征向量在相应的线性变换下方向保持不变，只是被缩放了特征值倍。
- eigen- = own-, unique-：特征向量是一个矩阵自有的、独特的性质。